

Todos los ejercicios puntúan igual

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcula b para que sea derivable en $x=0$.
y 'c'

1° Continua en $x=0$

$$f(0) = 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$$

$$c = 0$$

2° Derivable en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + b = b$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b = 1$$

Apellidos y nombre.....



2. Calcula k para que esta función sea continua: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$$f(1) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\cancel{x-1}) \cdot 1}{(\sqrt{x}+1)(\cancel{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Supo

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

Apellidos y nombre.....

3. Utilizando la definición de derivada:

a) Derivada de $f(x) = 3x^2 + 5x$ en $x_0 = 1$

b) Función derivada de $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$a) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 + 5(1+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+2h+h^2) + 5 + 5h - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+6h+3h^2+5+5h-8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{11h+3h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(11+3h)}{\cancel{h}} = \boxed{11}$$

$$b) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} \cdot \frac{(x+h+1)(x+1)}{h}}{\cancel{h}} = \boxed{\frac{2}{(x+1)^2}}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h-1}{x+h+1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+h-1)(x+1) - (x-1)(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2 + x + hx + h - x - 1 - (x^2 + xh + x - x - h - 1)}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{hx} + \cancel{h} - \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{x} + \cancel{x} + \cancel{h} + \cancel{1}}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{2h}{(x+h+1)(x+1)} =$$

Apellidos y nombre.....

4. Comprueba si las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos x$ se cortan en algún punto.

Decir en que intervalo de longitud 1 se encuentra dicho punto de corte.

Si utilizas teorema enunciado y compruebas que se puede usar.

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 3 - \cos x$$

cumplen las condiciones para usarlo

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 - \cos 1 = -1 - \cos 1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 - \cos 2 = 12 - 3 - \cos 2 = 9 - \cos 2 > 0$$

Como son continuas, $h(x)$ es continua

por teorema de Bolzano se anula en un

punto intermedio. Luego se cortan en $[1; 2]$

Apellidos y nombre.....

5. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificándolas al máximo:

a) $y = \ln \frac{x^4}{(3x+4)^2}$; b) $y = x^2 \operatorname{sen} x$; c) $y = 2^{\operatorname{sen} x}$; d) $y = \frac{\ln x^2}{x}$

$$a) \quad y = \ln \frac{x^4}{(3x+4)^2} = \ln x^4 - \ln (3x+4)^2 = 4 \cdot \ln x - 2 \ln (3x+4)$$

$$y' = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x+4} = \frac{12x+16-6x}{(3x+4)x} = \boxed{\frac{6x+16}{3x^2+4x}}$$

$$b) \quad y' = 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x = \boxed{x(2 \operatorname{sen} x + x \cos x)}$$

$$c) \quad y = 2^{\operatorname{sen} x}$$

$$\ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln 2; \quad \frac{y'}{y} = \ln 2 \cdot \cos x;$$

$$y' = \ln 2 \cdot \cos x \cdot y = \boxed{\ln 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\operatorname{sen} x}}$$

$$d) \quad y = \frac{\ln x^2}{x} = \frac{2 \ln x}{x};$$

$$y' = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{2(1 - \ln x)}{x^2}}$$